E.N.S.E.T. section B' session 1987 DURÉE : 4 heures

NOTATIONS.

$\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$) désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls (resp. strictement positifs). $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) désigne l'ensemble des entiers naturels (resp. des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1).

1. Soit $t \in \mathbb{R}^+$; on note $[t]$ sa partie entière, elle est caractérisée comme l'unique entier naturel qui vérifie : $[t] \leqslant t < [t] + 1$.

2. Soit une suite (u_n) de réels. Si m est un élément de $\mathbb{N}$ et si x est un réel tel que $x \geqslant m$, le symbole

$\sum_{m < n \leqslant x} u_n$ désigne la somme $\sum_{m < n \leqslant [x]} u_n$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; on note $S_p(\alpha) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \frac{1}{n^\alpha}$ et, dans le cas où la série converge, $S(\alpha) = \lim_{p \to \infty} S_p(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

4. ln désigne le logarithme népérien.

L'objet du problème est l'étude des sommes $S_p(\alpha)$ et d'un procédé de calcul numérique approché de $S(\alpha)$ dans le cas où la série converge. Les préliminaires établissent quelques propriétés utilisées au cours du problème.

PRÉLIMINAIRES Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.1. Montrer que, si n est un entier tel que $n > 1$: $\int_{n-1}^{n} [t] f'(t)\, dt = \{ n f(n) - (n-1) f(n-1) \} - f(n)$.

I.2. Soient m et k deux entiers tels que $0 < m < k$.

Montrer que : $\sum_{m+1 \leqslant n \leqslant k} f(n) = k f(k) - m f(m) - \int_m^k [t] f'(t)\, dt$.

I.3. Soient un entier naturel m et un réel $x \geqslant m + 1$. Établir la relation :

$$\sum_{m+1 \leqslant n \leqslant x} f(n) = [x] f(x) - m f(m) - \int_m^x [t] f'(t)\, dt = \int_m^x (t - [t]) f'(t)\, dt + \int_m^x f(t)\, dt + f(x) \{ [x] - x \}.$$

II. ÉTUDE DES SOMMES PARTIELLES $S_p(\alpha)$

II.1. On suppose $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

a. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$, prouver l'encadrement :

$$\frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} - 1 \right\} \leqslant S_p(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{p^{\alpha-1}} - 1 \right\},$$

pour tout p entier, $p > 1$.

b. Retrouver ainsi la condition nécessaire et suffisante d'existence de $S(\alpha)$ dans le cas $\alpha \neq 1$.

c. Montrer que, si $S(\alpha)$ existe, alors : $1 \leqslant (\alpha - 1) S(\alpha) \leqslant \alpha$.

II.2. On suppose $\alpha = 1$.

a. Montrer, en utilisant les préliminaires : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \frac{1}{n} = \ln(p) + 1 + \int_1^p \frac{\psi(x)}{x^2}\, dx$,

où ψ est une fonction que l'on explicitera.

Tournez la page S. V. P.

b. Trouver la nature de la série de terme général $\frac{1}{n}$.

c. Montrer l'existence d'une constante C telle que : $\lim_{p \to \infty} \left\{ \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \frac{1}{n} - \ln(p) \right\} = C$.

II.3. On suppose $\alpha > 1$.

a. En utilisant le raisonnement déjà fait dans II.1.*a*, trouver pour le reste $R_N(\alpha) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ l'encadrement :

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_N(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

b. Trouver un majorant de l'erreur faite sur le calcul de $S(\alpha)$ en utilisant pour valeur approchée :

$$\bar{S}(\alpha) = S_N(\alpha) + \frac{1}{2(\alpha - 1)} \left\{ \frac{1}{N^{\alpha-1}} + \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right\}.$$

c. On suppose $\alpha = 2$. Trouver une valeur de l'entier N tel que $|S(2) - \bar{S}(2)| < \frac{10^{-8}}{2}$.

Que pensez-vous de la méthode numérique correspondante?

III. Étude d'une suite de polynômes

Cette partie ne dépend pas de ce qui précède.

Dans cette partie, on désigne par $\mathfrak{P}$ (resp. par $\mathfrak{P}_n$ où n est un entier $\geqslant 1$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. des polynômes de degré $\leqslant n$). Un polynôme est considéré également comme fonction polynômiale.

III.1. Soit T l'application de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$ qui, à tout polynôme P, associe le polynôme TP défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad TP(x) = \int_x^{x+1} P(t)\, dt.$$

a. Montrer que la restriction T_n de T à $\mathfrak{P}_n$ est un endomorphisme de $\mathfrak{P}_n$.

b. On suppose $n = 3$. Déterminer l'image matricielle de T_3 relativement à la base canonique de $\mathfrak{P}_3$.
Montrer que T_3 est un endomorphisme bijectif.

c. Montrer que T est un endomorphisme bijectif de $\mathfrak{P}$. En déduire que, pour tout entier n, il existe un polynôme unique noté B_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_x^{x+1} B_n(t)\, dt = x^n.$$

Quel est le degré de B_n ?

d. Calculer les premiers polynômes B_0, B_1, B_2 et B_3.

III.2. Montrer qu'étant donné un élément Q de $\mathfrak{P}$ il existe un polynôme unique P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{x+\frac{1}{2}} P(t)\, dt = Q(x)$.

III.3.

a. Montrer la relation, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_x^{x+1} B_n'(t)\, dt = B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$,

et en déduire : (1) $\qquad \forall n \geqslant 1, \qquad B_n' = n B_{n-1}$.

Réciproquement, que peut-on dire d'un polynôme P tel que $P' = n B_{n-1}$ et $P(0) = B_n(0)$?

b. Établir, pour $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\int_x^{x+1} B_n(1-t)\, dt = (-1)^n \int_x^{x+1} B_n(t)\, dt$.

En déduire :

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad$ et $\quad B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

c. Montrer que $B_n(0) = B_n(1)$ et $B_{2n+1}(0) = 0$.

d. Prouver la relation où $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{x+\frac{1}{2}} B_n(2t)\,dt = 2^{n-1} \int_x^{x+\frac{1}{2}} \left\{ B_n(t) + B_n\left(t+\frac{1}{2}\right) \right\} dt.$$

En déduire :

(3) $$B_n(2x) = 2^{n-1} \left\{ B_n(x) + B_n\left(x+\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

III.4. On pose $b_n = B_n(0)$ et on définit la puissance symbolique (où n est un entier) $(x+b)^{[n]}$ par la formule :

$$(x+b)^{[n]} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k x^{n-k} b_k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k x^k b_{n-k}.$$

a. En utilisant la question III.3.*a*, montrer, par récurrence, que $B_n(x) = (x+b)^{[n]}$.

b. Montrer que $b_n = (1+b)^{[n]} \quad \forall n \geqslant 2$.

Vérifier cette formule avec b_1, b_2 et b_3. Calculer ensuite b_4, b_6 et b_8.

c. Montrer que $\left|B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant |b_n|$.

III.5.

a. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, B_{2n+1} admet au moins trois zéros appartenant à $[0, 1]$. En déduire une factorisation de B_3.

b. On suppose dans cette question qu'un polynôme B_{2n+1} (avec $n \geqslant 2$) admet p zéros distincts dans $]0, 1[$ (où $p \geqslant 2$).

Montrer qu'alors B_{2n} a au moins $p+1$ zéros distincts dans $]0, 1[$ et qu'il en résulte que B_{2n-1} possède également au moins p zéros distincts dans $]0, 1[$. En déduire que, pour n entier $\geqslant 1$, B_{2n+1} n'a que trois zéros dans $[0, 1]$.

c. Montrer que B_{2n+1} a un signe constant sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et le signe opposé sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

IV. Calcul approché d'une somme $S(\alpha)$

Dans cette partie, on utilise les fonctions P_n définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $P_n(x) = B_n(x - [x])$.

IV.1.

a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad P_n(x+k) = P_n(x).$$

b. Montrer que, sur $]0, 1[$, la fonction P_n est dérivable continûment. Étudier la dérivabilité de P_n aux points d'abscisses entières.

IV.2.

a. Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient deux entiers m et p vérifiant $0 < m < p$.

Prouver :

$$\sum_{m \leqslant n \leqslant p} f(n) = \int_m^p f(x)\,dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(p)\} + \int_m^p P_1(x) f'(x)\,dx .$$

b. f est à présent une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}_+^*$ et k est un entier $\geqslant 1$.

Montrer que :

$$\sum_{m \leqslant n \leqslant p} f(n) = \int_m^p f(x)\,dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(p)\} + \sum_{1 \leqslant n \leqslant k} \frac{b_{2n}}{(2n)!}\{f^{(2n-1)}(p) - f^{(2n-1)}(m)\} + \frac{1}{(2k+1)!}\int_m^p P_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\,dx.$$

IV.3. f, m, p et k étant supposés donnés comme dans la question précédente, on approche la somme $\sum_{m \leqslant n \leqslant p} f(n)$ par la quantité :

$$\int_m^p f(x)\,dx + \frac{1}{2}\{f(m) + f(p)\} + \sum_{1 \leqslant n \leqslant k} \frac{b_{2n}}{(2n)!}\{f^{(2n-1)}(p) - f^{(2n-1)}(m)\}.$$

Quelle est l'erreur commise?

Dans ce qui suit, on prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $k = 3$.

On pose $I(m, p) = \int_m^p P_2(t)\,\frac{dt}{t^3}$.

On définit également la suite (v_n) par :

$$v_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}} B_2(t)\,\frac{dt}{(t+n)^3} ;$$

$$v_{2n+1} = \int_{\frac{1}{2}}^1 B_2(t)\,\frac{dt}{(t+n)^3} .$$

a. Montrer que la suite (v_n) est alternée.

b. Prouver que $|v_{2n+1}| \leqslant |v_{2n}|$ et que $|v_{2n+2}| \leqslant |v_{2n+1}|$.

c. Établir que $I(m, p) = \sum_{2m \leqslant k \leqslant 2p-1} v_k$ et déduire des inégalités précédentes que : $|I(m, p)| \leqslant |v_{2m}|$.

d. Montrer que $|v_{2m}| \leqslant \frac{1}{4m^3}|b_2|$.

IV.4. En utilisant ce qui précède pour $m = 10$, donner une valeur approchée de $\sum_{10 \leqslant n \leqslant 10^4} \frac{1}{n^2}$.

Comment utiliser ce résultat et II.3.*b* et *c* pour donner une valeur approchée de S(2)? Quelle est la précision obtenue?

• • •